

## Oyun teorisi: Ders 9 Transkript

03 Ekim 2007

**Profesör Ben Polak:** Geçen sefer bunu görmüştük, taş, kâğıt, makas oyununda ( $1/3, 1/3, 1/3$ ) karma stratejisi örneğini görmüştük. Bugün biraz daha resmi olacağız, karma stratejileri tanımlayacağız ve onlar hakkında konuşacağız ve bu biraz zaman alacak. Resmi tanımla başlayalım: bir karma strateji (ve ilerledikçe notasyonu geliştireceğim, buna  $P_i$  diyeyim,  $i$  bunu oynayan oyuncu)  $P_i$  i'nin saf stratejileri üzerinden yapılan bir randomizasyon. Yani özellikle, bu  $P_i(s_i)$  notasyonunu Oyuncu i'nin  $P_i$  kullanarak karma yaptığı  $s_i$  oynama olasılığı için kullanacağız. Yani  $P_i(s_i)$ ,  $P_i$ 'nin saf strateji  $s_i$ 'ye ayırdığı olasılıktır.

Bunu hemen örneğimizle ilişkilendirelim. Örneğin, eğer ben taş, kâğıt, makasta ( $1/3, 1/3, 1/3$ ) oynuyorsam o zaman  $P_i (1/3, 1/3, 1/3)$  ve taşın  $P_i$ 'si -- yani  $P_i(R)$   $1/3$ 'tür ( $R$  rock kelimesinin baş harfi). Bununla fazla uğraşmadan, burada yaptığım şey sadece notasyon geliştirmek. Sorularınız olabilecek iki şeyle hemen yüzleşelim. Birincisi şu, prensipte  $P_i(s_i)$  sıfır olabilir. Sıfır karma strateji oynuyorum diye tüm stratejilerimi işin içine sokmam gerekmez. Sadece iki stratejim üzerinden karma strateji oynuyor olabilirim ve diğerine sıfır olasılık bırakabilirim. Yani, örneğin yine taş, kâğıt, makasta strateji  $1/2, 1/2, 0$ 'ı düşünebiliriz. Bu stratejide ben zamanın yarısında taş, yarısında kâğıt oynarım, ama hiçbir zaman makas oynamam.

Herkes bunu anladı mı? Ve hazır buradayken, diğer aşırı uca bakalım. Belirli bir saf stratejiye karma stratejimin ayırdığı olasılık 1 olabilir. Ben tüm olasılığı belirli bir stratejime ayırabilirim. Saf stratejilerden birine 1 ayıran karma stratejiye ne denir? Bunun için iyi bir isim ne olabilir? Bu bir saf stratejidir. Fark ettiyseniz saf stratejileri, karma stratejilerin tüm ağırlığı belli bir saf stratejiye ayırdığı özel bir durumu gibi düşünebiliriz. Örneğin, eğer  $P_i(R)$  1 olsaydı, bu ben saf strateji taşı oynuyorum demekle aynı olurdu, yani bir saf strateji.

Yani bunda bir şey yok. Sadece notasyon geliştirme konusunda biraz entel oluyorum ve her şeyin yerli yerinde olduğundan emin oluyorum ve yine ortaya koymak amacıyla, bunun sonuçlarından birisi şu, şimdi saf stratejilerimiz karma stratejilerimize gömülmüş vaziyette. Bir karma stratejim olduğu zaman zaten diğer tüm saf stratejilerimi işin içine sokuyorum demektir. Hadi devam edelim. Bunu biraz yukarıya iteceğim, pardon. Şimdi karma stratejilerden alınan getirilerin neler olduğunu düşünmek istiyorum ve yine biraz yavaş gideceğim çünkü başlarda biraz uğraştırıcı ve buna alışacağız, panik yapmayın, ilerledikçe ve bunu ev ödevlerinizde ve sınıfta gördükçe buna alışacağız.

Bir karma stratejinin getirilerinden konuşalım. Özellikle, endişe edeceğimiz şeyler beklenen getiriler olacak. Yani karma strateji P'nin beklenen getirisi, hadi tutarlı olalım ve buna  $P_i$  diyelim,  $P_i$ 'nin beklenen getiriş nedir? Bu karmada yer alan her bir saf stratejinin beklenen getirisinin ağırlıklı ortalamasıdır – ağırlıklı ortalaması veya ağırlıklı karması da diyebilirsiniz. Yani bu çok açık olan bir şeyin uzun bir şekilde söylenmesi gibi olacak ama yine de izin verin söyleyeyim. Bir karma stratejinin beklenen getirisini hesaplama yolu şudur, Üzerinde karma yaptığım saf stratejilerin getirilerinin uygun bir şekilde ağırlıklandırılmış ortalamasını alırız.

Bunu daha az soyut yapmak için hemen örneğe bakalım. İşte birçok kez geri geleceğimiz, ama bugün bir kez bakacağımız, bir örnek ve bu daha önce gördüğünüz bir oyun. İşte Cinsiyetler Savaşı, Oyuncu A – Oyuncu 1 A ve B seçebilir ve Oyuncu 2 A ve B seçebilir ve yapmak istediğim şey belirli stratejilerin beklenen getirisini hesaplamak. Diyelim ki P Oyuncu 1 tarafından oynanıyor ve P diyelim ki  $(1/5, 4/5)$ . Bununla ne demek istiyorum? Şunu demek isterim, Oyuncu 1 A oynamaya  $1/5$ , B oynamaya  $4/5$  ayırıyor. Ve varsayalım ki Q – yani P ve Q kullanacağım çünkü  $P_1$  ve  $P_2$  kullanmaktan daha kolay. Yani diyelim ki Q Oyuncu 2'nin seçtiği karma ve onun seçtiği  $(1/2, 1/2)$  yani A'ya  $1/2$  ve B'ye  $1/2$  olasılık koyuyor. Bu örnekte hayatımızı kolaylaştırması için notasyon değiştirdiğimi fark ettiniz, P'yi satırın karmaları ve Q'yu kolonun karmaları olarak kullanacağım.

Ve cevaplamak istediğim soru şu, bu durumda P'nin beklenen getiriş nedir? P'nin beklenen getiriş nedir? Bunu yapacağım yol şu, ilk önce P'nin içerdiği her bir saf stratejinin, P'deki saf stratejilerin, beklenen getirisinin ne olduğunu soracağım. Başlamak için – ilk adım şu soruyu sormak Oyuncu 1'in Q'ya karşı A oynamadan beklenen getirisi nedir ve Q'ya karşı B oynamadan beklenen getirisi nedir? Bu bizim ilk sorumuz olacak ve geri dönüp P'nin getirisini oluşturacağız. Sanırım bunlar yapabileceğimiz şeyler.

Peki Q'ya karşı A'nın beklenen getirisi nedir? A oynadığınız zamanın yarısında rakibinizi de A oynarken bulacaksınız, bu durumda 2 alırsınız ve A oynadığınız zamanın yarısında rakibinizi B oynarken bulacaksınız bu durumda da 0 alırsınız. Bunu yazalım. Yani ben  $1/2$  olasılıkla 2 artı  $1/2$  olasılıkla 0 alacağım. Herkes memnun mu bundan? Bu bana 1 verir. Lütfen bunu yaparken ki matematiğimi düzeltin. Tahtadayken yanlış yapmak çok kolay, ama sanırım bu doğru oldu.

Tam tersi, ya B oynasaydım? Satır oyuncusu için Q'ya karşı, burada Q  $(1/2, 1/2)$ , B oynamaktan beklenen getiri nedir? Yani B oynadığım zamanın yarısında A oynayan bir Oyuncu 2 ile karşılaşırım ve 0 alırım ve yarısında Oyuncu 2'nin B oynadığını görürüm ve 1 alırım. Bunu yazalım. Yani yarısında 0 alırım ve yarısında 1 alırım ve ortalaması  $1/2$  olur. Bu sorduğum ilk şeydi. Ve şimdi işi bitirmek için, Oyuncu 1'in Q2ya karşı P oynamaktan beklenen getirisini bulmak istiyorum. Bu en başta cevaplamak istediğim soru buydu. Bunu nasıl düşünebiliriz? P'de  $1/5$  – P'ye göre Oyuncu 1 zamanın  $1/5$ 'inde A ve  $4/5$ 'inde B oynuyor, değil mi? Yani beklenen getiriye bulmak

için yapacağımız şey şu,  $1/5$ 'i alacağız ve bu durumda Oyuncu 1 A oynuyor ve Q'ya karşı A oynamaktan beklenen getirisini alacak ve zamanın  $4/5$ 'inde B oynuyor olacak ki bu durumda da Q'ya karşı B oynamanın beklenen getirisini alacak.

Şimdi buna yukarıdan aldığımız rakamları koyarak, yani zamanın  $1/5$ 'inde Q'ya karşı A'nın beklenen getirisini alır ve o buradaki daha önce hesapladığımız rakam. Yani buradaki rakam aşağıya gelebilir, 1. Ve zamanın  $4/5$ 'inde Q'ya karşı B oynar, bu durumda beklenen getirisi  $1/2$ 'ydi, yani bu  $1/2$  buraya gelir. Herkes tamam mı şimdiye kadar, bunu nasıl oluşturduğum şu ana kadar tamam mı? Bu podyum önünüze geçiyor mu arkadaşlar, siz tamam mısınız? Bunu birazcık iteyim. Buradaki toplam nedir? Bu 1'in  $1/5$ 'i artı  $1/2$ 'nin  $4/5$ 'i.  $1/2$ 'nin  $4/5$ 'i  $2/5$ 'tir, yani toplamda  $3/5$  elde ederim. Yani buradaki toplam  $3/5$ . Herkes bunu nasıl yaptığımı anladı mı? Şimdi bu hazır buradayken bir şeyi fark edelim. Ben P oynadığım zaman, bazen A ve bazen B oynuyordum. Ve A oynamış olduğumda, A'nın beklenen getirisini alıyordum. Ve B oynadığımda, B'nin beklenen getirisini alıyordum. Bu yüzden sonuçta elde ettiğim getiri  $3/5$ , A oynadığımda alacak olduğum 1 getirisi ile B oynadığımda alacak olduğum  $1/2$  getirisinin arasında olmalı.

Doğru mu? Yani  $3/5$ ,  $1/2$  ile 1 arasında. Herkes için bu tamam mı? Şimdi bu çok basit ve genel ve oldukça kullanışlı bir fikir. Fikir şu alacağım getiri saf strateji oynamaktan beklenen getirilerin arasında kalmalı. Tekrar söyleyeyim. Genel olarak, karma strateji oynadığım zaman beklenen getirim, karmadaki her bir saf stratejinin beklene getirisinin ağırlıklı bir ortalaması olur ve ağırlıklı ortalamalar her zaman karmanın içinde yer alan getirilerin arasındadır. Şimdi bu basit fikri biraz daha zorlayayım. Diyelim ki sınıftakilerin ortalama boy uzunluğunu alacağım – bu sınıftaki ortalama boy. Şimdi şöyle yapayım, sınıfı kullanmak yerine bazı asistanları kullanayım.

Şimdi şu 3 asistanımızı ayağa kaldıralım bir saniyeliğine. Diyelim ki ben bu 3 asistanın boy ortalamasını bulmak istiyorum. Birbirinize yakın durun da en azından ne olduğunu bir göreyim. Sanırım, bulunduğum yerden gördüğüm kadarıyla, Ali en uzun ve Myrto en kısası, doğru mu? Yani bu ortalamanın ne olabileceğini hemen bilmiyorum, ama ileri sürdüğüm şu bu üçünün herhangi bir ağırlıklı ortalaması, üçünün arasındaki en kısa olan Myrto'nun boyu ile üçünün arasında en uzun olan Ali'nin boyu arasında bir rakam verecek, değil mi? Bu doğru mu? Yani bu oldukça genel bir fikir. Teşekkürler arkadaşlar, birazdan size geri geleceğim.

Bunu başka bir yerde düşünelim, bir takımın vuruş (batting) ortalamasını düşünelim. Beysboldaki takım vuruş ortalaması, örnek olarak Yankee'leri kullanalım. Biliyoruz ki takımın vuruş ortalaması, Yankee'lerin vuruş ortalaması – bunun ne olduğunu bilmiyorum, bu sabah bakmadım – ama biliyorum ki bu en yüksek vuruş ortalamasına sahip oyuncu, tahmin ediyorum ki bu Jeter, ve en düşük arasında, takımda en düşük vuruş ortalamasına sahip olan, muhtemelen bu ligler arası oyunlarda birkaç kez vuruş yapmış olan atıcılardan birisidir. (Mets'i kullansaydım daha iyi olurdu ama Mets taraftarlarına acıdığım için bu hafta onlardan bahsetmiyorum.)

Yani bu çok basit bir fikir, aldatıcı şekilde basit. Ortalamalar, ağırlıklı ortalamalar, ortalamasını aldığınız şeylerin en yükseği ile ortalamasını aldığınız şeylerin en küçüğü arasında yer alır diyor. Herkes için bu fikir tamam mı? Şimdi bu çok basit fikir çok büyük bir sonuca yol açacak ve bu büyük sonuç şu. Basit fikir, büyük sonuç. Yani bu inanılmaz derecede basit fikri takiben bir ders çıkacak ve ders şu. Eğer bir karma strateji en iyi tepkiyse, yani eğer bir karma strateji yapabileceğiniz en iyi şeyse, o zaman karmada yer alan saf stratejilerin her biri – burada biraz gevşek davranıyorum ama bundan endişe edecek kadar entel olanlar için demek istediğim karmada pozitif olasılık ayrılmış olanlar – karmadaki her bir stratejinin kendisi de en iyi tepki olmalıdır.

Yani özellikle her biri aynı beklenen getiriye vermelidir. İşte bu ortalamalar en büyük ve en küçük arasındadır şeklindeki inanılmaz derecede basit fikirden çıkan büyük kanaat. Bu dersten kendimize büyük bir kanaat çıkaralım. Nedir bu kanaat? Bu kanaat şu, eğer karma bir strateji en iyi tepkiyse, eğer yapabileceğim en iyi şey bir karma strateji oynamaksa, o zaman bu karmada oynadığım her bir saf stratejinin, bu karmada pozitif olasılık ayırdığım her bir saf stratejinin kendileri de en iyi tepki olmalıdır. Özellikle, bu yüzden her biri de aynı beklenen getiriye vermelidir.

Hadi örneğimize geri dönelim. Yine 3 asistanı mı çalabilir miyim? Diyelim ki oyun, diyelim ki benim içinde olduğum şey – bunu daha önce kolaylaştırmış olmalıydım, biraz aşağıya geleyim. Burada duracağım, bu iyi. Diyelim ki içinde olduğum oyun, oyundaki getiri şu, oyunda yapmam gereken en uzun boylu asistan grubunu seçmek. Benim getirim hangi asistan alt grubunu seçersem onun boy ortalaması olacak ve bunlar benim 3 seçeneğim. Eğer bunlar arasından bir taneden fazla seçersem bir ağırlıklı ortalama alacağım, bu bir karma strateji. Benim amacım ise burada seçtiğim alt grubun boyunu maksimize etmek.

Yani bu oyunda şunlar benim saf stratejilerim: benim 3 saf stratejim Myrto, Ali veya Jake'i seçmek. Bunlar benim 3 saf stratejim. Ve benim karmam, ben bu ikisini karabilirim, bu ikisini karabilirim, üçünü karabilirim. Ama hatırlarsanız benim buradaki getirim grubu, ortalamayı olabildiği kadar yüksek tutmak. Peki ortalamayı nasıl yapabileceğim kadar yüksek tutarım? Ortalamayı tutabileceğim kadar yüksek tutmak için başlangıçta Myrto'yu atarım çünkü Myrto sadece ortalamayı düşürüyor, doğru mu? Ortalama boy demeliyim ve hiçbir şey yok ki – ve aslında sanırım Jake'i de atacağım, muhtemelen Jake'i de atacağım çünkü böylece sadece Ali kalır.

Yani eğer ikisini seçtiğim bir durum olsaydı, o zaman ikisi aynı boyda olmalıydı ama boyları eşit olmadığı için, ben sadece en iyisini seçmeliyim. Yankee'ler örneğime dönelim, eğer Yankee'lerden bir alt grup seçecek olsaydım, herhangi bir sayıda insan seçebilirim, en yüksek ortalamaya sahip olmak için, bu alt gruptaki en yüksek vuruş ortalamasına. Bunu yapmanın yolu şu olurdu, vuruş ortalaması en yüksek olan Yankee'yi bulup onu seçmek. Başka bir örnek daha yapalım. Ön sıradaki öğrencileri kullanayım, burada benim, bu ön sıradaki öğrencileri biraz ayağa kaldırabilir miyim? Bu sıranın bir parçası.

Ve farz edelim ki hayattaki amacım ortalaması en yüksek not ortalamasını oluşturmak. Not ortalamalarını sorarak bu arkadaşları utandırmayacağım. Hayattaki amacım bunların, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 öğrenci arasından bir alt grup seçmek, öyle ki bu alt gruptaki not ortalamalarının averajı yapabileceğim kadar yüksek olsun. Burada ne yapacağım? Burası Yale olduğu için sadece 4,0 not ortalamasına sahip insanları bulup onları seçerim Doğru mu? Şöyle düşünebilirsiniz neden not ortalaması 3,9 olan birini dahil etmiyoruz? Bu da oldukça iyi. Öyleyse neden olmasın? Çünkü eğer bu grupta not ortalaması 4,0 olan birisi varsa sadece onu seçerek daha iyi durumda olurum. 3,9'luk öğrenci sadece averajı düşürür.

Şimdi varsayalım ki 4,0 not ortalamasına sahip kimse yok ve diyelim ki bu insanlardan 3 tanesi, diyelim ki bu 3 kişi 3,9 not ortalamasına sahip. Yani bu üçünün 3,9 not ortalaması var, hayal edin ve diyelim ki diğerleri B+ gibi berbat not ortalamaları var. Bunlar bizim gelecekteki hukuk fakültesi öğrencileri ve bunlar da – sonunda ne yapacaklarını kim bilir ki – belki de başkan olurlar. Yani not ortalamalarının averajı en yüksek olan grubu seçmek için ne yapacağım? Öncelikle düşük not ortalamalı şu arkadaşları atacağım, böylece onların hepsi oturabilirler ve bu son kalan 3'üne bakacağım ve bu son 3, eğer hepsi gruptaysa hepsinin not ortalaması aynı olsa iyi olur. Neden ki?

Eğer grubumun averajını maksimize etmeye çalışıyorsam, eğer bunlardan herhangi birinin düşük not ortalaması varsa onu atmalıyım ve eğer bir tanesinin diğer ikisinden daha yüksek not ortalaması varsa, diğer ikisini atmalıyım. Yani eğer averajı oluştururken her üçünü de dahil ediyorsam hepsinin not ortalaması aynı olmak zorunda, bunun 3,9 olduğunu varsayacağım, hala hukuk fakültesine girebiliyorsunuz diye varsaymak için. Herkes anladı mı? Evet? Tamam, teşekkürler arkadaşlar.

Yani bunun hakkında böyle düşünmek istiyorum. Buradaki fikir şu eğer en iyi tepkim olarak bir karma strateji oynuyorsam, karmada kullandığım her bir şey en iyi olmak zorunda. Ve bunun nedeni, eğer öyle değilse, en iyi olmayan şeyi atarım ve ortalamam yükselir.

Bu bizi bir sonraki fikre götürür, ama önce formalite icabı bir tanım eklemem izin verin. Tanım şu, bir kama strateji profili – yapacağım şey şu, Nash dengesini yeniden tanımlayacağım ki notlarımızda bir yerlerde bulunsun. Bir karma strateji profili – burada bir tire olmalı –  $(P_1^*, P_2^*, \dots, P_N^*)$  a kadar), bir karma strateji Nash dengesidir eğer her bir Oyuncu  $i$  için – yani her  $i$  oyuncusu için – o oyuncunun karma stratejisi  $P_i^*$  diğer herkesin  $P_{-i}$  seçimine karşı Oyuncu  $i$  için en iyi tepkiyse. Yani şimdiye dek oyuncu stratejileri için iyi geliştirilmiş bir notasyondan faydalanıyorum. Nash dengesinin bu tanımı, birkaç haftadır kullanmakta olduğumuz Nash dengesi tanımıyla tam anlamıyla aynı, tek fark daha önce saf strateji gördüğümüz her yere S yerine P koydum. Yani saf stratejiler yerine karma stratejiler kullanmanın dışında aynı tanım.

Ama çıkardığımız dersin ima ettiği şey nedir? Şudur, eğer  $P_i^*$  Nash dengesinin bir parçasıysa -- yani diğer herkesin  $P_{-i}^*$  yapmasının karşısında  $P_i^*$  en iyi tepkiyse -- o zaman  $P_i^*$  in içinde yer alan her saf stratejinin kendisi de en iyi tepki olmalıdır. Yani dersin ima ettiği, ders şunu ima ediyor. Eğer belirli bir stratejinin  $P_i^*$  i pozitifse, bir başka deyişle, bu stratejiyi karmamda kullanıyorsam, o zaman diğer herkesin yaptığına karşı bu strateji de en iyi tepkidir. Tamam, matematiksel açıdan bugünün büyük fikri bu, bu tahta. Arkadan bunu okumanız zor geliyorsa, bana güvenin bunların hepsi ders sonunda sihirli bir şekilde bilgisayarda ortaya çıkan notlarda yazılı.

Şu anda buna gözlerinizi dikip bakıyorsunuz çünkü bunların hepsi biraz yeni ve yeni oldukları kadar, diyorsunuz ki tamam ama bize ne, bu olağan gibi görünen gerçek beni neden ilgilendirsin? Bu olağan gibi görünen gerçeğe önem verecek olmamızın nedeni şu, bu gerçek Nash dengesini bulmamızı olağanüstü şekilde kolaylaştıracak. Bu gerçek, bu ders, bu fikir yani eğer karmanın bir parçası olarak bu saf stratejiyi oynuyorsam, onun kendisi en iyi tepki olmalı fikri karma strateji Nash dengelerini bulmamızda kullanacağımız hile olacak. Bunu size gösterebilmemin tek yolu bunu yapmak, günün geri kalanını da bunu yaparak harcayacağım.

Bir oyuna bakacağım ve bu oyunun üzerinden gideceğiz. Bunu biraz tartışacağız çünkü çok eğlenceli bir oyun ve bu oyunun karma strateji dengelerini bulacağız. Herkes nereye gittiğimizi anladı mı? Devam etmeden önce emin olmak istiyorum, gözüne ışık tutulmuş tavşan gibi bakan var mı? Bu kısa zamanda bitirmek için çok fazla formaliteydi. Bu noktada sorusu olan var mı? Hepiniz tamam mısınız? Devam etmek için hazır mısınız? Sadece buradaki çıkarımın oldukça basit bir fikirden geldiğini hatırlayın. Basit fikir şu, ağırlıklı ortalamanın getiri o ortalamada yer alan en iyi ve en kötü şeylerin arasındadır ve bu yüzden içindeki şeyleri en iyi tepkimin bir parçası olarak dahil ediyorsam, onların hepsi iyi olmalı. Basit fikir oydu, dramatik çıkarım bu.

Bunu size kanıtlamanın tek yolu, bunun faydalı bir şey olduğunu size kanıtlamanın tek yolu devam edip bunu yapmak. Bu yüzden yapacağım şu, bu tahtaları temizleyeceğim ve bir örnek göstermeye başlayacağım. Yine söylüyorum, panik yapmayın, sanırım sınıfın bu kesimindeki birçok kişi paniklemeye meyilli, çünkü bu yeni bir fikir, sanki etrafta çok fazla matematik varmış gibi görünüyor. Bunun hiçbir tarafı zor matematik değil, bu daha çok aritmetik. Bu sadece panik yapmama fikridir. Bakmak istediğim örnek tenisten ve iki tenis oyuncusu tarafından oynanan, oyun içinde bir oyun dikkate alacağım ve hadi bu oyunculara Venüs ve Serena Williams diyelim.

Birkaç yıl önce bu örnek için Venüs ve Serena Williams'ı kullanırdık ve sonra bir süre Venüs ve Serena Williams'ın kim olduğunu hatırlamayacağınızdan endişe ettim ve bu yüzden rastgele iki Rus seçmeye başladık, ama şimdi geri döndük. Venüs ve Serena Williams'ı seçmeye geri döndük gibi görünüyor. Oyun içinde oyun şu, diyelim ki onlar

oynuyorlar ve Serena filede ve top Venüs'ün sahasında ve Venüs topa yetişmiş ve Venüs şuna karar vermek zorunda, Serena'nın yanından Serena'yı geçen bir vuruş yapmak, Serena'nın sağına veya sol yanına doğru. Fark ederseniz bunu idare edilebilir yapmak için aşirtma (lob) vuruş yapma ihtimalini şimdilik hariç tutuyorum. Yani temelde Venüs'ün karar vermesi gereken karar Serena'yı Serena'nın soluna doğru, yani Serena'nın dış vuruş (backhand) tarafına veya Serena'nın sağ yanına , yani Serena'nın iç vuruş (forehand) tarafına vuruş yapmak.

İnsanlar ne anlattığımı takip edecek kadar tenise aşinalar mı? Bunun Wimbledon olduğunu farz edeceğiz, yoksa kimse zaten filede olmazdı sanırım. Yani bu Wimbledon'da. Buraya getirileri koymaya çalışalım. Getiriler şunlar olacak. Sanırım bu örnek orijinal olarak Dixit'e ait, ama çok önemli değil. Sanırım bu örnek Dixit ve Skeath'e ait. İşte bazı rakamlar ve bu rakamları birazdan açıklayacağım. Bunlar 50, 50, 80, 20, 90, 10 ve 20, 80. Peki nedir bu rakamlar? Öncelikle stratejilerin neler olduğunu açıklayayım, satır oyuncusunun Venüs kolon oyuncusunun Serena olduğunu varsayıyorum.,

Eğer Venüs L seçerse (left kelimesinin ilk harfi) bunun Serena'yı, Serena'nın solundan geçmeye çalışmak olduğunu varsayıyorum. Yönleri Serena'nın bakış açısına göre tayin edeceğiz. Ve eğer sağa vuruş yaparsa bu Serena'yı, Serena'nın sağından geçmeye çalışmak anlamına geliyor. Eğer Serena L seçerse bu biraz kendi soluna doğru hile yaptığı anlamına geliyor: burada hile yapmak kurallara uymamak anlamında değil, durduğu yer veya yaslandığı yan anlamında. Ve eğer sağ seçerse bu biraz kendi sağına doğru hile yapmak anlamına geliyor. Yani bu, sağ elini kullandığını varsayarsak ki gerçekten de öyle, kendi dış vuruşuna doğru hile yapmak ve bu da kendi iç vuruşuna doğru hile yapmak. Peki, bu rakamlar ne anlama geliyor. Kolay olanlarla başlayalım. Eğer Venüs Sol seçer ve Serena Sağ seçerse, o zaman Serena yanlış tahmin etmiştir. Doğru mu? Bu durumda puanı %80 Venüs ve %20 Serena alır.

Tam tersi, eğer Venüs Sağ seçer ve Serena Solu seçerse, o zaman yine Serena yanlış tahmin etmiş olur ve bu durumda puanı %90 Venüs ve %10 Serena alır. Bu oldukça alışıldık bir fikir olmalı şimdiye kadar, ama neden bu durumlarda getiriler %90 ve %80 ama %100 değil? Neden eğer Serena yanlış tahmin ederse Venüs %100 kazanmıyor? Kimse var mı? Belki elleri görebiliriz, mikrofonları hazır edebiliriz. Neden burada %100 değil? Birisi? Patrick? Mikrofonu bekle.

**Öğrenci:** Bazen servis atarken dışarıya vuruyor.

**Profesör Ben Polak:** Doğru, bu bir servis bile değil, bu geçen bir vuruş ama aynı geçerli. Yani bazen Serena'yı başarıyla geçen bir vuruş yaparsınız ama top saha dışına çıkar. Yani burada bu %10 ile gerçekleşir ve burada %20 ile gerçekleşir. Diğer iki kutuya bakın, eğer Venüs Serena'nın soluna vuruş yapar ve Serena Solu tahmin ederse o zaman Serena'nın topu yakalayacağını ve vole (volley) vuracağını

varsayacağız, ama vole sadece %50 ile içeri – filenin üzerinden geçip içeri düşer, yarı yarıya, yani getiriler (50, 50). Yarısında Venüs yarısında Serena puanı kazanır. Tem tersi, Venüs Serena'nın Sağına vuruş yapar ve Serena doğru tahmin edip Sağı seçerse, o zaman bu kutudayızdır. Yine, Serena doğru tahminde bulunmuştur ve başarılı bir vole vuruşu yapar ve bu kez %80 topu içeri atar, yani Venüs %20 ile ve Serena %80 ile puanı alır.

Burada oyununun tarifini bitirmek için, fark ederseniz Serena'nın Sağ volenin Sol volesinden biraz daha iyi olduğunu varsayıyoruz. Yani bu onun iç vuruş volesi ve bunun dış vuruş volesinden daha kuvvetli olduğunu varsayacağız. Tem tersi, Venüs'ün Serena'nın Soluna doğru yaptığı aşirtma vuruşun, Serena'nın Sağına doğru yaptığı vuruştan biraz daha iyi olduğunu varsayıyoruz. Bu onun çaprazlama (cross court) aşirtması ve bu onun çizgi önü (down the line) aşirtması. Bu güzel detayların hiçbiri çok önemli değil, ama eğer ilgilenirseniz rakamlar bunlardan kaynaklanıyor. Bu arada bunun gerçek veri olduğunu iddia etmiyorum, bu rakamları ben uydurdum. Aslında sanırım Dixit uydurmuştu, ben nereden aldığımı unuttum.

Peki, tamam, herkes oyunu anladı mı? Şimdi hayal edin, Venüs veya Serena olduğunuzu hayal edin veya daha gerçekçi bir şekilde Venüs veya Serena'nın koçu olduğunuzu hayal edin. Burada tenis takımında olan var mı? Hayır. Hayal edin onların koçu oldunuz, bu dersi aldınız ve yeni koçları olarak babalarının yerini almak için başvurdunuz. Bu zor bir görev sanıyorum ki. Açık olan soru şu, Wimbledon öncesi Venüs'e koçluk yapıyorsunuz, biliyorsunuz ki bu durum oluşacak ve Venüs'e ne yapması gerektiği konusunda koçluk etmek isteyebilirsiniz. Serena'yı çizgi önüne doğru mu geçmeye çalışmalı yoksa çaprazlama vole mi göndermeli, çaprazlama aşirtma mı yapmalı? Fark ettiyseniz buradaki soru şu, Venüs olarak kendi kuvvetinize göre mi, ki bu çaprazlama aşirtma vuruş, yoksa Serena'nın zafiyetine göre mi, yani Serena'nın dış vuruşuna doğru mu topu göndereceksiniz? Kendi kuvvetli olduğunuz tarafa oynamak çaprazlama vuruş, Serena'nın zafiyetine oynamak ise Solu seçmek demek.

Tam tersi, Serena için, kendi kuvvetli olduğunuz yana mı yaslanmalısınız ki sanırım bu Sağa yaslanmak olur veya Venüs'ün zafiyetine doğru mu eğilmelisiniz ki sanırım bu da Sola yaslanmak olur? Bu şey üzerinde koçluk kitaplarına bakarsanız veya bir televizyon kanalında (ESPN) tenis yorumu yapan berbat adamları dinlerseniz – yine başımı belaya sokuyorum – tenis yorumu yapan çok iyi insanları dinlerseniz, bu noktada inanılmaz derecede budalaca şeyler söylediklerini görürsünüz. Şöyle şeyler söylerle, her zaman kendi gücünüze göre oynamalı ve karşı tarafın zayıflıklarını hiç hesaba katmamalısınız. Bugün bunun iyi bir tavsiye olmadığını kanıtlamak fazla uzun sürmeyecek sanırım. Ama en azında insanlar bunun zor bir problem olduğunu görebiliyorlar mı, bu hemen kendini belli eden bir problem değil, doğru değil mi?

Hemen kendini belli etmemesinin bir nedeni sadece burada hiçbir stratejinin domine edilmemesi değil, ama bu oyunda, bu alt oyunda, saf strateji Nash dengesi



olmaması. Saf strateji Nash dengesi yok – ve fark ettiyseniz şimdi niteleyici (qualifier) ekledim. Eskiden olsaydı sadece Nash dengesi derdim, ama şimdi resimde karma stratejiler de var, ben saf strateji Nash dengesinden konuşurken sadece saf stratejilerin olduğu dengelerden bahsediyor olacağım. Peki, neden saf strateji Nash dengesi yok? Hadi bir bakalım. Eğer Venüs – Eğer Serena Venüs'ün Sol seçeceğini düşündüyse o zaman en iyi tepkisi, belli ki Sola yaslanmak ve eğer Serena Venüs'ün Sağı seçeceğini düşündüyse, o zaman en iyi tepkisi Sağa yaslanmaktır, yani 50 yirmiden büyüktür ve 80 ondan büyüktür. Ve tam tersi, eğer Venüs Serena'nın biraz Sola meyillendiğini düşündüyse o zaman en iyi tepkisi Serena'nın Sağına doğru vurmaktır ve eğer Venüs Serena'nın Sağa yaslandığını düşündüyse o zaman en iyi tepkisi Serena'nın Soluna doğru vuruş yapmaktır.

Yani sanırım bu hiç de şaşırtıcı değil biraz düşünürseniz, hiç şaşırtıcı değil, bu küçük döngüyü elde edeceksiniz böyle, ama hemen görüyoruz ki bu en iyi tepki fonksiyonları hiçbir zaman örtüşmeyecek, yani saf strateji dengesi yok. Yani biz burada biraz takıldık gibi ama sanırım bir sonraki sorunun ne olacağını biliyorsunuz ve bunu daha fazla muallakta bırakmamalıyım. Bir sonraki soru şöyle olacak, tamam saf strateji Nash dengesi yok, ama daha şimdi yeni bir fikir ortaya attık, neydi bu? Bu karma stratejilerde Nash dengesi vardı. Belki karma strateji Nash dengesi vardır. Gerçekten de var, bir tane var. Yani şimdiki egzersizimiz, karma strateji Nash dengesini bulmak ve onu bulmadan önce ne anlama geleceğini yorumlayalım.

Bu oyundaki bir karma strateji Nash dengesi Venüs için Serena'nın soluna ve Serena'nın sağına vuruş yapmanın bir karması ve Serena için Sola yaslanmak ve Sağa yaslanmanın bir karması olacak, böylece her birisinin karması, her birinin randomizasyonu diğerinin randomizasyonuna en iyi tepki olacak. Bu oyuncular kız kardeş olduklarından ve birbirleriyle, sadece yarışmalarda değil antrenman yaparken de pek çok kez oynamış olduklarından, birbirlerine karşı bir karma strateji Nash dengesine ulaşmış olabileceklerini söylemek mantıklı görünüyor. Bu bizim yapmaya çalışacağımız şey, şimdi bunu nasıl yapacağız? Yapacağımız şey şu, şuradaki hileden, dersten faydalanacağız.

Bu ders bize diyor ki eğer oyuncular Nash dengesinin bir parçası olarak karma strateji oynuyorlarsa, karmada yer alan her bir saf strateji, onların her bir saf stratejinin kendisi en iyi tepki olmalı. Bu fikri kullanacağız. Hadi bunu yapmaya çalışalım. Bunu yaparak umuyorum ki, size hemen bu fikrin çok kullanışlı olduğunu göstereceğim, en azından Williams kız kardeşlere koçluk yaparsanız faydalı olur. Pekâlâ, bunu tutmak istiyorum hala okuyabilmeniz için. Birazcık aşağıya indireceğim. İnsanlar bunu hala okuyabiliyorlar mı? Tamam, yapmak istediğim şu, Serena için ve Venüs için denge olan birer karma bulmak istiyorum. Bunu yukarıya itmiştim tekrar aşağıya çekeyim. Bu benim için çok akıllıca bir hareket değildi.

Ben aslında biraz notasyon kullanmak istiyorum, yani daha önceki gibi, varsayalım ki Serena'nın karması, hadi  $Q$  ve  $(1 - Q)$  kullanalım Serena'nın karması için ve

Venüs'ün karması için de  $P$  ve  $(1 - P)$  kullanalım. Şu notasyonu oluşturalım. İşte hile burada, bu dersin birazcık sihirli kısmı, o yüzden dikkatinizi verin, şapkadın tavşan çıkarmak üzereyim. Hile, ne yapmalıyım önce, Serena'nın Nash dengesi karmasını bulmak için, yani bu  $(Q, (1 - Q))$ , yapacağım şey şu, ben Venüs'ün getirilerine bakacağım. Yani Serena'nın Nash dengesi karmasını bulmak için gereken hile Venüs'ün getirilerine bakmak, benim sihirli hilem bu olacak. Hadi nasıl olduğunu görmeye çalışalım.

Hadi Venüs'ün getirilerine bakalım,  $Q$ 'ya karşı Venüs'ün getirileri. Eğer Serena  $(Q, (1 - Q))$  seçiyorsa, Venüs'ün getirileri nelerdir? Eğer Solu seçerse  $Q$  olasılıkla getirisi 50 olur – ve burada göstergeli kullanacağım ve kamerada da görülebileceğini umacağım.  $Q$  olasılıkla 50 alır ve  $(1 - Q)$  olasılıkla 80 alır. Eğer Sağı seçerse  $Q$  olasılıkla 90 alır ve  $(1 - Q)$  olasılıkla 20 alır. Şunu göstermek istedim. Yani ne? Yanisi şu: karma strateji Nash dengesi arıyoruz, yani özellikle, sadece Serena karma yapmıyor ama bu durumda biz Venüs'ün de karma yaptığını ileri sürüyoruz. Yani eğer Venüs de karma yapıyorsa, o zaman bu demek oluyor ki Venüs de Sol stratejisini  $P$  olasılığıyla kullanıyor ve Sağ stratejisini  $(1 - P)$  olasılıkla kullanıyor. Eğer Venüs  $Q$ 'ya karşı en iyi tepkisi olarak, Serena'ya en iyi tepkisi olarak, bazen Sol bazen de Sağ seçiyorsa, Solun getiri ve Sağın getiri hakkında ne doğru olmalı?

Tekrar üzerinden gidelim, varsayıyoruz ki Venüs karma yapıyor. Yani bazen solu seçiyor bazen sağı seçiyor ve Nash dengesinde, yani bir en iyi tepki seçiyor. Yani bu  $(P, (1 - P))$  karması her neyse, bu bir en iyi tepki. En iyi tepki olan  $P$ 'yi oynadığından ve bu bazen sol bazen de sağ oynamak demek olduğundan, bu durumda ne olmalı? Bu durumda şöyle olmalı, hem solun kendisi hem de sağın kendisi, ikisinin de kendileri en iyi tepki olmalı. Eğer öyle olmasalardı, onları karmadan çıkarmalıydı, böylece ortalama getirisi yükselirdi. Doğru, tam olarak yüksek boy elde etmek için kısa asistanı attığımız gibi ve yüksek not ortalaması elde etmek için başarısız Yale öğrencisini attığımız gibi.

Yani eğer bu Nash dengesinde Venüs karma yapıyorsa o zaman sol ve sağın getirileri eşit olmalı, ikisi de en iyi tepki olmalı, hem sol hem de sağ en iyi tepki olmak zorunda, yani özellikle, beklenen getirileri aynı olmak zorunda. Değil mi? Bu doğru mu? Peki, bu benim ne yapmama izin veriyor? Bu şuraya eşittir işareti koymama izin veriyor. Sol en iyi tepki olduğundan ve sağ en iyi tepki olduğundan, her ikisi de en iyi tepki olduklarından, ikisi de aynı beklenen getiriyi vermeli. Bunların beklenen getirileri işte burada, bunlar aynı olmak zorunda. Şimdi, bir denklemim ve bir bilinmeyenim var ve şimdi iş cebire kaldı. Biraz cebir yapayım. Bu ifadenin şu ifadeye eşit olduğunu öne sürüyorum, biraz sadeleştirerek şunu elde ederim – bunu yanlış yapmadığımdan emin olmak için iyi seyretmelisiniz – şunu elde edeceğim  $40Q$ , bu şunu ima eder  $40Q$  eşittir  $60(1 - Q)$ . Yani bu  $50$ 'yi bu yana aldım ve bu  $20$ 'yi diğer yana aldım, yani  $40Q$  eşittir  $60(1 - Q)$  elde ettim ve bu da şunu gösterir  $Q$  eşittir  $0,6$ . Yani bu son iki adım sadece cebirdi.

Peki buradaki hile nedir? Hile şu ki ben Venüs'ün getirilerine bakarak Q'yu, Serena'nın nasıl karma yaptığını buldum, Venüs'ün de karma yaptığını bilerek ve dolayısıyla Venüs'ün getirilerini eşitleyerek. Tekrar söyleyelim, Venüs'ün karma yaptığında, onun beklenen getirilerinin eşit olması gerektiğini bildiğim için Serena'nın karmasını çözebildim, Serena'nın karması bu. Hadi tekrar yapalım. Şu anda bir tahtamın daha olmasını isterdim. Bu rakamların hepsini kaybetmek istemiyorum, o yüzden biraz sıkıştırmaya çalışacağım. Ne yapacağımı biliyorum. Hadi şunun tamamından kurtulalım. İşte oldu, bu işe yarar. Bunun tamamından kurtulalım. Rakamlarımı hala görebiliyorum.

Hadi tersini yapalım. Hileyi tekrar yapalım, bu kez yapacağım şey şu, Venüs'ün nasıl karma yaptığını bulacağım. Şimdi Serena'nın nasıl karma yaptığını biliyorum, o yüzden şimdi Venüs'ün nasıl karma yaptığını hesaplayacağım. Şimdi, Serena'nın nasıl karma yaptığını bulmak için Venüs'ün getirilerini kullanmıştım. Venüs'ün nasıl karma yaptığını bulmak için ne yapacağım? Serena'nın getirilerini kullanacağım. Yani Venüs'ün karması olan  $(P, (1-P))$ 'yi bulmak için – dikkat edelim bu onun Nash dengesi karması – Serena'nın getirilerini kullanalım. İşte şöyle, eğer Serena seçerse, bu S'nin getirileri, eğer Serena L seçerse o zaman onun getirisi ne olur? Yine, bunu yanlış yapmadığımdan emin olmak için iyi seyredin ve ben kendime yardımcı olması için bazı şeylere işaret edeceğim. P olasılıkla 50 alır. Yani P olasılıkla 50 ve  $(1-P)$  olasılıkla 10 alır. Ve eğer Sağa yaslanmayı seçerse, iç vuruş yönüne eğilmeyi seçerse, o zaman P olasılıkla 20 alır ve  $(1-P)$  olasılıkla 80 alır.

Biliyoruz ki Serena karma yapıyor, Serena karma yapıyorsa bu iki getiri hakkında ne söylenebilir? İki getiri hakkında ne doğru olmalıdır? L'nin getirisi ve R'nin getirisi, bunlar hakkında ne doğru olmalıdır, Serena Nash dengesinde bu iki stratejinin bir karmasını oynadığına göre? Bu durumda hem L en iyi tepki hem de R en iyi tepki olmak zorundadır ve bu durumda da getiriler, birileri bağırırsın, eşit olmalıdır, teşekkürler. Eşit olmak zorundalar, bunlar eşit olmalı. Eşit olmalılar çünkü Serena Sol veya Sağ seçmeye kayıtsız ve bu yüzden onları karma yapıyor. Yani yine, bunların eşit olduğu gerçeği işi cebire indiriyor ve tekrar muhtemelen yanlış yapacağım ama yine de deneyeyim. Şunu ileri sürüyorum, buradan 20'yi alalım, şunu elde ederim  $30P$  eşittir  $70(1-P)$ . Umarım doğrudur, doğru görünüyor. Yine, bu noktada bu sadece cebirdir. 20'yi buradan aldım ve 10'u buradan aldım ve bu şunu gösterir P eşittir 0,7.

Şimdi karma strateji Nash dengesini bulduğumu ileri sürüyorum. İşte burada. Nash dengesi şöyle oluşur. Dikkatli olalım, bu Venüs'ün karması. Yani eğer Venüs karma yapıyorsa  $(0,7;0,3)$ , 0,7 solda ve 0,3 sağda ve Serena karma yapıyorsa  $(0,6;0,4)$ , yani bu Venüs'ün karması ve bu da Serena'nın karması. Venüs 0,7 olasılıkla Serena'nın Soluna doğru vuruş yapıyor ve Serena o yöne 0,6 olasılıkla eğiliyor. Daha önceki hileyi kullanarak bu Nash dengesini bulabildik. Şimdi bunun üzerinde konuşarak pekiştirelim. Diyelim ki eğer Serena, sola 0,6 ile eğilmek yerine 0,6'dan daha fazla kez eğiliyor. Siz Venüs'ün koçusunuz ve diyelim ki Serena'nın sola 0,6 dan fazla eğildiğini biliyorsunuz, Venüs'e ne tavsiye edersiniz?

Tekrar deneyeyim. Diyelim ki Venüs'ün koçu sizsiniz ve Serena'nın 0,6 dan daha fazla olasılıkla sola eğildiğini gözlemlediniz, Venüs'e ne yapmasını tavsiye edersiniz? Sağa vuruş yapmasını, bağırın.

**Öğrenci:** Sağa vuruş yapmasını.

**Profesör Ben Polak:** Sağa vuruş yapmasını, kesinlikle. Eğer Serena sola 0,6 dana daha yüksek oranla eğiliyorsa, o zaman Venüs'ün en iyi tepkisi sağa vuruş yapmaktır. Bu onun puanı alma şansını maksimize eder. Tam tersi, eğer Serena Sola 0,6 oranından daha az eğiliyorsa, o zaman Venüs ne yapmalı? Her seferinde sola vurmali. Yani eğer Serena tam olarak bu karmayı kullanmazsa, o zaman Venüs'ün en iyi tepkisi gerçekte bir saf strateji olur. Tekrar söyleyelim, eğer Serena çok sık sola yaslanıyorsa, 0,6 oranından fazla, o zaman Venüs sadece Sağa yönelmeli ve eğer Serena Sola çok az eğiliyorsa, o zaman Venüs hep sola yönelmeli. Tam olarak aynısını öbür taraftan da yapabiliriz. Eğer Venüs 0,7 oranından daha yüksek şekilde sağa vuruş yaparsa, yani çaprazlama aşirtma vuruşunu kullanırsa, ve siz Serena'nın koçuysanız, Serena'ya ne yapmasını söylemelisiniz? Hep o yöne gitmesini.

Yani eğer Venüs 0,7 oranından daha sık olarak Serena'nın soluna vuruyorsa, Serena sadece her zaman sola eğilmeli ve eğer Venüs sola 0,7 den daha az vuruş yapıyorsa, o zaman Serena hep sağa gitmeli. Yani isterseniz, koçluk yapma kitaplarına bu böyle girer. Tamam, nasıl gidiyorum şimdiye kadar? Herkesi kaybettim mi yoksa hala beni takip edebilenler var mı? Kaçınız tenis oynuyor, oynamışlığı var? Yani bugünden sonra hepinizin tenisi gelişmiş olacak, değil mi? Şimdi hayatı daha ilginç hale getirelim. Başlangıca dönelim.

Bunun bir denge olduğunu bulduk, bu Venüs ve Serena'nın oynayış şekli, Venüs ve Serena birbirlerini mükemmelen tanıyorlar, böyle karma yaptıklarını biliyorlar, buna en iyi tepkilerini verecekler, kendilerini burada bulacaklar. Ama bu arada Serena yeni bir koç işe alıyor ve yeni koç Serena'ya filede oynamayı ve özellikle dış vuruş volesini çok çok iyi öğretiyor. Yani Serena'nın yeni koçu, diyelim ki Tony Roche veya onun gibi birisi, oldukça iyi bir koç ve Tony Roche Serena'nın dış vuruş volesini ilerletiyor ve bu getirileri değiştiriyor. Yani siz tüm matrisi tekrar yazmalısınız ama ben hile yapacağım. Yani diğer her yönüyle bir önceki oyunun aynısı, sadece şu dışında Serena dış vuruş volesini yaptığında, %70 ile puanı alıyor. Yani eskiden (50, 50)'nin olduğu kutu şimdi (30, 70) oldu.

Yani Serena dış vuruş volesini geliştirdiği için oyun değişti. Bunun Wimbledon oyununu nasıl etkileyeceğini bulmak istiyoruz. Şimdi, hala bir saf strateji Nash dengesi olmadığını kontrol etmek çok uzun sürmez. Hala durum bu, hatta daha da fazlası, öyle ki Venüs'ün sol seçimine karşı Serena'nın sol seçimi en iyi tepki. Yani durum hala öyle ki en iyi tepkiler çakışmıyor, hala saf strateji Nash dengesi yok. Yapacağımız şey tabii ki de karma strateji dengesini bulmak, ama bunu yapmadan önce, mantıksal olarak bunu düşünelim. Sezgisel bir cevap bulabilir miyiz bir bakalım.

Tahmin ediyorum ki bulamayız, ama bir cevap sezebilir miyiz bir bakalım. Serena dış vuruş volisini geliştirdi ve bu yüzden onu yakaladığı zaman daha sık sayı almaya başladı. Yani bir etki, düşünebilirsiniz ki, belki de doğrudan etki demek isteyebiliriz ve sanırım burada iki etki var. İki etki var, bunlardan birine doğrudan etki diyeceğim ve etki deyince özellikle Serena'nın oyunu nasıl oynaması gerektiğine ilişkin etki demek istiyorum. Yani Serena dış vuruş volisini geliştirdiği için o voleyi yakaladığı zaman daha sık tutturuyor, yani bu durumda şöyle söylenebilir – siz Serena'nın koçusunuz – bu durumda eskiden olduğundan daha fazla sola yaslanmalısın çünkü en azından o dış vuruş volisini yakaladığında daha sık tutturuyorsun. Yani doğrudan etki şöyle diyor Serena daha sık sola yaslanmalı, bir başka deyişle Q artmalı.

Doğru mu? Serena şimdi dış vuruş volisinde daha iyi, o yüzden onu biraz daha sık tercih etmesi iyi olur ve bu yüzden Q artar. Yani bu doğrudan etki, ama tabii ki bu işin bir de “ama”sı var. Aması nedir? Tekrar, buradaki tenis oyuncularına bakalım, tenis oynuyorsanız elinizi kaldırın. Aniden kimse tenis oynamamaya başladı, hadi ellerinizi kaldırın tamam. Buradaki “ama” nedir? Serena'nın dış vuruşunun geliştiğini, o yüzden dış vuruşuna biraz daha fazla eğileceğini düşünüyoruz, “ama” nedir? “Ama”nın şu olduğunu ileri sürüyorum – yanıyorsam söyleyin – aması şu Venüs (her şeyden önce onun kız kardeşi değil mi, yani Venüs Serena'nın dış vuruşunun geliştiğini biliyor.) yani Venüs Serena'nın soluna eskisinden daha ender vuruş yapacak. Doğru mu? Serena'nın dış vuruşu geliştiği için, Venüs Serena'nın dış vuruşuna doğru eskisinden daha ender olarak topu gönderecek ve bu da Serena'ya dış vuruşuna yaslanma konusunda daha az meyilli yapabilir çünkü top o yöne daha az gelecek.

Yani bu da doğrudan olmayan veya stratejik etki. Stratejik etki şu, Venüs daha az L'yi seçer, bu yüzden Serena sola yaslanma sayısını azaltır çünkü top o yöne daha nadir gelir. Şimdi fark ettiyseniz iki etki birbirlerinin tam tersi yöne gidiyor, doğru mu? Bir tanesi Q'nun artacağını öne sürüyor, bu doğrudan etki ve diğeri daha ince, diyor ki şimdi sadece benim oyunumun nasıl geliştiğini değil aynı zamanda oyunumun geliştiğini bilen diğer kişinin de nasıl tepki vereceğini düşünmem lazım, bu daha ince etki ve bu da Q'yu aşağıya çekecek. Bunu daha az ihtimalli yapacak, bu sola yaslanmanın karşıtı bir argüman.

Serena'nın koçu olduğunuzu hayal edin, bu etkilerden hangisinin kazanacağını düşünürsünüz, hadi bir anket yapalım. Hangi etkinin kazanacağını düşünüyorsunuz? Doğrudan etki mi doğrudan olmayan etki mi? Doğrudan etki mi yoksa stratejik etki mi? Kim doğrudan etki diye düşünüyor? Kim Serena'nın, kim Serena'ya kuvvetli yanına ağırlık vermesini ve sola biraz daha sık yaslanmasını tavsiye eder, kim doğrudan etki diye düşünüyor? Ellerinizi kaldırın, bir anket yapalım. Kim doğrudan olmayan etki, Serena oraya vuruşa daha nadir kazanır diye düşünüyor? Kim çekimser kalıp, koç olmayı reddediyor? Bayağı çok fazlanız, Pekâlâ. Bunu Nash dengesini tekrar çözerek bulacağız.

Yapacağımız şey daha önce yapmış olduğumuz hesaplamaları Serena'dan başlayarak tekrar yapmak. Yani Serena'nın karmasını bulmak için, Serena'nın yeni denge karmasını bulmak için, ne yapmamız lazım? Soru şu, dengede, Serena sola daha fazla mı yaslanacak (yani Q artacak) yoksa daha az mı (yani Q düşecek). Yani Serena'nın yeni denge karmasının ne olduğunu bulmalıyım. Yeni Q nedir? Serena'nın dengedeki Q'sunu bulmak için ne yapabilirim, buradaki hile nedir? Bağırın. Venüs'ün getirilerini kullanırım. Yani Serena'nın yeni Q'sunu bulmak için Venüs'ün getirilerini kullanırım. Şimdi hadi bunu yapalım. Venüs'ün bakış açısıyla, sol seçtiğinde getirisi şimdi, ve yine göstergeç kullanayım, Q olasılıkla 30, bu yeni Q ve  $(1-Q)$  olasılıkla 80, 30 Q olasılıkla artı 80  $(1-Q)$  olasılıkla.

Tekrardan, bu yeni Q, aslında buna Q virgül filan demeliyim ama demeyeceğim. Eğer Sağı seçerse o zaman getirisi ne olur? Q olasılıkla 90,  $(1-Q)$  olasılıkla 20. Bu iki getiri hakkında ne biliyoruz eğer Venüs dengede karma yapıyorsa? Dengede karma yaptığını biliyoruz çünkü saf strateji Nash dengesi olmadığını biliyoruz, yani Venüs'ün dengede bu iki stratejiyi de kullandığından dolayı bu getiriler hakkında ne biliyoruz? Aynı olmalılar. Bu iki stratejiyi de kullandığı için ikisi de aynı derecede iyi olmalı. İkisi de en iyi tepkiler bu yüzden bu iki getiri eşittir.

Eşit olduklarından tek yapmam gereken Q'yu çözmek, hadi yapalım. Şunu elde ederim 90 eksi 30,  $60Q$  eder, bu eşittir 80 eksi 20, bu da  $60(1-Q)$  eder, yani Q 0,5 olur. Cebir işlemlerini çok hızlı yaptıysam bana güvenin, sanırım doğru buldum. Buradan itibaren sadece cebirdi. Peki ben ne buldum? Q arttı mı azaldı mı? Şöyleydi, Q önceden neydi? 0,6 ve şimdi ise 0,5, şimdi kolay olduğunu düşündüğüm bir soru sorayım, arttı mı azaldı mı? Azaldı. Q azaldı, dengedeki Q azaldı. Yani hangi etki daha büyükmüş? Kendi kuvvetiniz doğrultusunda oynamanın doğrudan etkisi mi yoksa rakibinizin sizin kuvvetli yönünüze daha nadir oynadığı doğrudan olmayan etki mi? Hangi etki en büyük etki oldu? Doğrudan olmayan, stratejik etki.

Tabii ki ben stratejik etkinin daha büyük olmasını isterim, çünkü bu ders strateji hakkında, ama burada stratejik etki gerçekten kazandı. Stratejik etki, doğrudan olmayan etki daha büyük. Bu benim için güzel bir haber çünkü şöyle diyor Oyun Teorisi dersi almaya tenezzül etmemiş azıcık daha akılsız koç bu doğrudan etkide duracak ve Serena'ya yanlış yöne gitmesini söyleyecektir, ama benim dersimi almış ve bu yüzden olağandışı bir şekilde doğrudan olmayan bir yoldan maaşıma katkı yapan akıllı koç ise doğrusunu yapar.

Şimdi Venüs'ün yeni karmasını da çözümleriz ve birazdan bunu yapacağız. Ama bunu yapmadan önce, şunu öne çıkarmama izin verin, şimdi gerçekten Venüs'ün etkisini sezebiliriz. Tam rakamlar olmayabilir ama sezinleyebiliriz. İddia ettiğim gibi, iddia ediyorum ki bunu dikkatlice düşünersek, Venüs'ün öncesine göre sola mı daha fazla yoksa sağa mı daha fazla vuracağını biliriz. Fark ederseniz yeni dengede Serena sola daha nadir gidecek dış vuruşta artık daha iyi olsa da, oraya gittiğinde topa vurmada daha iyi olsa da. Yani Serena sola daha nadir

yaslandığından bu yeni dengede Venüs için ne doğru olmalı? Şöyle olmalı, Venüs dengede sola daha seyrek vuruş yapıyor olmalı. Bu mantıklı geliyor mu? Bize bunu söyleyecek yeterince bilgi var zaten tahtada, yine de hesaplamayı yapalım. Gidip bir tahta alalım ve hesaplamaları yapalım. Bunu tamamlamak amacıyla, Venüs'ün tam olarak ne yapacağını bulalım.

Peki Venüs'ün ne yapacağını bulmak için kullanacağımız hile ne? Venüs'ün nasıl karma yapacağını bulmak istiyorum. Venüs'ün yeni P'sini bulacağım, Venüs'ün yeni denge karmasını nasıl bulurum? Serena'nın getirilerine bakarım. Eğer Serena Sola seçerse, onun getiriş, bu kez bunu hızlı okuyacağım,  $70P$  artı  $10(1-P)$  ve eğer Serena Sağı seçerse getirisi  $20P$  artı  $80(1-P)$  ve burada yanlış yaparsam asistanlarım yakalar diye dua ediyorum ve bunların eşit olmaları gerekliliğini biliyorum çünkü Venüs'ün karma yaptığı gerçeğini – pardon Serena'nın karma yaptığı gerçeğini biliyorum, yani bunlar eşit olmalı. Bunlar eşit olduğundan çözebilir ve doğru yaptığımı ümit edebilirim, elime şu geçer  $50P$  eşittir  $70(1-P)$ , yani  $P$  eşittir  $7/12$ . Yeniden, bu sadece cebir, ben biraz hızlandırdım, bu sadece cebir. Aynı fikir, sadece cebir. Yani  $7/12$  gerçekten de öncekinden daha düşük, çünkü önceden  $7/10$ 'du, yani bu bizim sonucumuzu teyit eder.

Yani stratejik etki domine etti. Venüs Serena'nın dış vuruşuna daha ender attı ve netice itibariyle, öyle ki Serena sağa daha sık yaslanmaya değer buldu. Şimdi bunun üzerinden bir kere daha konuşalım. U bir karşılaştırmalı statik (comparative statics) egzersizidir. Bir oyuna baktık, bir denge bulduk, oyunda temel bir değişiklik yaptık ve tekrar baktık yeni denge için, buna karşılaştırmalı statik denir. Bunun mantığından bahsedelim. Bir değişiklik yapmadan önce Venüs kayıtsızdı. Sağa vuruş yapmak ve sola vuruş yapmak arasında kayıtsızdı. Sonra Serena'nın sola doğru vole vuruşunu geliştirdik, onun dış vuruşunu geliştirdik. Eğer Serena'nın oynayışını değiştirmeseydik, Venüs ne yapmış olacaktı?

Yani farz edelim ki gerçekte Serena'nın Q'su değişmemiş olsun. Eğer Serena'nın Q'su değişmediyse, önceden Venüs'ün kayıtsız olduğunu hatırlayarak, Venüs oyununu nasıl değiştirdi? Birisi? Eğer eski Q'dan başlasaydık ve Serena'nın dış vuruş oynama becerisini geliştirmiş olsaydık ve eğer Q değişmemiş olsaydı, Venüs ne yapardı? Bir daha hiçbir zaman sola doğru atış yapmazdı, sadece sağa doğru atış yapardı ve bunun denge olması ihtimali yok. Yani Serena'nın oynayış tarzında bir şey Venüs'ü tekrar dengeye getirmeli, Venüs'ü yine kayıtsız olmaya getirmeli ve nedir bu? Bu Serena'nın sola daha seyrek gitmesi ve sağa daha sık gitmesidir. Tekrar söylemek gerekirse, eğer Q'yu değiştirmemiş olsaydık, Venüs sadece Sağa giderdi, yani Q'yu azaltmalıyız, Serena'yı daha sık sağa göndermeliyiz ki Venüs tekrar dengeye dönsün.

Tam tersi, eğer Venüs davranışını değiştirmemiş olsaydı, eğer Venüs tam olarak önceden yaptığı gibi vuruş yapmaya devam etseydi,  $P$  ve  $(1-P)$  eskisi gibi kalsaydı, o zaman Serena sadece sola giderdi ve bu bir denge olamazdı. Yani Serena'yı

dengeye geri getiren Venüs'ün oynayışındaki bir şey olmalı ve bu nedir? Bu Venüs'ün Sağa doğru daha sık vuruş yapmaya başlamasıdır. İki hatırlatma, gitmeden önce iki hatırlatma. Bekleyin, bekleyin, bekleyin. Birincisi yaklaşık 5 dakika içinde bu argümanların üzerinden giden bir bilgi notu sihirli bir şekilde, hepsi iki farklı oyunda, yani bu bilgi notuna bakabilirsiniz. İkinci şey, size üzerinde çalışabileceğiniz bir sürü örnek veren web sitesinde sihirli bir şekilde bir problem ödevi zaten çıkmıştı. Hafta sonunda pratik yapmak için tenis oynayın ve Pazartesi görüşürüz.

[transkript sonu]